Mathematical Logic

Mathematical Logic

The rules of mathematical logic specify methods of reasoning mathematical statements. Greek philosopher,

Aristotle, was the pioneer of logical reasoning. Logical

reasoning provides the theoretical base for many areas of mathematics and consequently computer science. It has many practical applications in computer science like design of computing machines, artificial intelligence, definition of data structures for programming languages

etc.

2.1 Propositional Calculus

Propositional Logic is concerned with statements to which the truth values, “true” and “false”, can be assigned. The purpose is to analyze these statements either individually or in a composite manner.

Definition.

In logic, a proposition (or a statement) is a meaningful

declarative sentence that is either true or false, but not both.-135-The truth value of a proposition is True "T or 1" if it is a true proposition and false "F or 0" if it is a false proposition. Letters p, q, r , … are used to denote proposition and are called propositional variables

المنطق الرياضي

تحدد قواعد المنطق الرياضي طرق

التفكير المنطقي في العبارات الرياضية. كان الفيلسوف اليوناني

أرسطو رائد التفكير المنطقي. يوفر التفكير المنطقي

الأساس النظري للعديد من مجالات الرياضيات وبالتالي علوم

الكمبيوتر. له العديد من التطبيقات العملية في علوم الكمبيوتر مثل

تصميم آلات الحوسبة والذكاء الاصطناعي وتعريف هياكل البيانات

للغات البرمجة

وما إلى ذلك

حساب المقترحات 2.1

تتعلق المنطق المقترحات بالعبارات التي

.“يمكن أن تُنسب إليها قيم الحقيقة، ”صحيح“ و”خطأ

والغرض من ذلك هو تحليل هذه العبارات

.إما بشكل فردي أو بشكل مركب

.التعريف

في المنطق، المقترح (أو العبارة) هو جملة إعلانية ذات معنى

إما صحيحة أو خاطئة، ولكن ليس

-كلاهما.-135

أو 1“ إذا كان T” “تكون قيمة صحة المقترح ”صحيح

أو 0“ إذا كان F” “مقترحًا صحيحًا، و”خطأ

للإشارة إلى ...، r ،q ،p مقترحًا خاطئًا. تُستخدم الأحرف

المقترح وتسمى متغيرات المقترحات

The following propositions are true (i) A triangle has three sides. (ii) 7 is odd. (iii) 2 divides 24. * The following propositions are false: (i) 5 + 3 = 9. (ii) Makkah is the capital of Saudi Arabia. (iii) 2 divides 7. * The following are not proposition: (1) Who are you? Not declarative sentences (2) Help yourself! Not declarative sentence. (3) $u - 2 = 1$ Neither true nor false. (4) $u - v = w$. Neither true nor false. (5) Broccoli tastes good. Meaningful declarative sentences, but is not proposition but rather matters of opinion or taste. Definition. A formula (or a compound proposition) A formula is formed from existing propositions using connectives. Definition. Since we need to know the truth value of a proposition in all possible scenarios, we consider all	العبارات التالية صحيحة (1) المثلث له ثلاثة أضلاع. (2) عدد فردي 7. (3) 2 يقسم 24. * العبارات التالية خاطئة: (1) 5 + 3 = 9. (2) مكة هي عاصمة المملكة العربية السعودية. (3) 2 يقسم 7. * ما يلي ليس اقتراحات: (1) من أنت؟ ليست جمل إخبارية. (2) تفضل! ليست جملة إخبارية. (3) $u - 2 = 1$ ليست صحيحة ولا خاطئة. (4) $u - v = w$. ليست صحيحة ولا خاطئة. (5) طعم البروكلي لذيذ. جمل إخبارية ذات معنى، ولكنها ليست اقتراحات بل هي مسائل رأي أو ذوق. التعريف. صيغة (أو اقتراح مركب) الصيغة تتكون من اقتراحات موجودة باستخدام أدوات الربط. التعريف. نظرًا لأننا نحتاج إلى معرفة قيمة صحة المقولة في جميع السيناريوهات المحتملة، فإننا نأخذ في الاعتبار جميع التركيبات المحتملة للمقولات التي يتم ربطهامعًا بواسطة أدوات الربط

the possible combinations of the propositions which are joined together by Logical Connectives to form the given compound proposition. This compilation of all possible scenarios in a tabular format is called a truth table. In particular, truth tables can be used to tell whether a propositional expression is true or false for all legitimate input values. Practically, a truth table is composed of one column for each input variable (for example, p and q),and one final column for all of the possible results of the logical operation that the table is meant to represent (for example, $p \rightarrow q$). Each row of the truth table therefore contains one possible configuration of the input variables (for instance, p is true (written 1 or T) q is false (written 0 or F)), and the result of the operation for those values.	المنطقية لتشكيل المقولة المركبة المعطاة. يُطلق على هذا التجميع لجميع السيناريوهات المحتملة .في شكل جدول اسم جدول الصحة على وجه الخصوص، يمكن استخدام جداول الصحة لمعرفة ما إذا كان التعبير المقولي صحيحًا أم خطأً لجميع قيم الإدخال الصحيحة. من الناحية العملية، تتكون جدول الحقيقة من عمود واحد لكل متغير إدخال ، وعمود أخير لجميع النتائج المحتملة (q و p(على سبيل المثال، pللعملية المنطقية التي يهدف الجدول إلى تمثيلها (على سبيل المثال، $\rightarrow q$). وبالتالي، يحتوي كل صف من جدول الحقيقة على تكوين واحد محتمل لمتغيرات الإدخال خطأ (يُكتب 0 q T) صحيح (يُكتب 1 أو pعلى سبيل المثال،) .، ونتيجة العملية لهذه القيم(F أو

Logical Connectives

Connectives are either unary operations like logical identity and logical negation, or binary operations like
logical conjunction, logical disjunction and logical implication.

Definition. (Logical identity and logical Negation). Let p be a proposition.

● Logical identity

Logical identity is an operation on one logical value, typically the value of a proposition that produces a value
of true if its operand is true and a value of false if its operand is false. The truth table for the logical identity
operator is as follows:

Logical Identity

p p

Operand Value

1 1

0-138-

● Logical negation

Logical negation is an operation on one logical value, typically the value of a proposition, which produces a value of true if its operand is false and a value of false if
its operand is true.

الروابط المنطقية

الروابط هي إما عمليات أحادية مثل
الهوية المنطقية والنفي المنطقي، أو عمليات ثنائية مثل
.الاقتران المنطقي، والفصل المنطقي، والاستدلال المنطقي

.(التعريف. (الهوية المنطقية والنفي المنطقي

.عبارة عن اقتراح p لنفترض أن

.عبارة عن اقتراح p لنفترض أن

● الهوية المنطقية

الهوية المنطقية هي عملية على قيمة منطقية واحدة،
عادةً ما تكون قيمة اقتراح ينتج قيمة
صحيحة إذا كان المعامل صحيحًا وقيمة خاطئة إذا كان
المعامل خاطئًا. جدول الصحة لمشغل الهوية المنطقية
:هو كما يلي

الهوية المنطقية

p p

قيمة المعامل

1 1

0-138-

● النفي المنطقي

النفي المنطقي هو عملية على قيمة منطقية واحدة،
عادةً ما تكون قيمة اقتراح، تنتج قيمة
صحيحة إذا كان المعامل كاذبًا وقيمة كاذبة إذا
.كان المعامل صحيحًا

(p~ أو p¬ جدول الحقيقة للإنكار المنطقي (يُكتب
:هو كما يلي

الإنكار المنطقي

p $\neg p$

1 0

The truth table for logical negation (written as ¬p or ~p)
is as follows:
Logical negation
p $\neg p$
1 0
0 1
Example.
The negation of the proposition "The sun shines on the
screen" is "The sun does not shine on the screen". ■
We will now introduce the logical connectives (binary operations) that are used to form formulas.
Definition. (Logical Conjunction" ∧ ")
Logical conjunction is an operation on two logical values, typically the values of two propositions, that produces a value of-139-
The truth table for p AND q (written as p ∧ q) is as follows:
Logical Conjunction
p q $p \wedge q$
1 1 1
1 0 0
0 1 0
0 0 0
Example.

0 1
.مثال
إنكار المقولة "الشمس تشرق على
■ ."الشاشة" هو "الشمس لا تشرق على الشاشة
(سنقدم الآن الروابط المنطقية (العمليات الثنائية
.التي تُستخدم لتكوين الصيغ
(" ∧" تعريف. (الاقتران المنطقي
الاقتران المنطقي هو عملية على قيمتين منطقيتين
، عادةً ما تكون قيمتي اقتراحين،
-تنتج قيمة -139
هو كما (p ∧ q يُكتب) p AND q جدول الحقيقة لـ
:يلي
الاقتران المنطقي
p q $p \wedge q$
1 1 1
1 0 0
0 1 0
0 0 0
.مثال

Example.
The disjunction of the propositions p and q where p and q
are the same propositions as in the above example, $p \vee q$,
is the proposition “It is sunny today or the sun shines on
the screen”. This proposition is true on any day that is
either sunny day or the sun shines on the screen (including both). It is only false on days that are not sunny and when it also does not shine on the screen. ■

Definition.
(“Logical Implication” or “Conditional Statement” " → ")
Logical implication is associated with an operation on two logical values, typically the values of two propositions, that produces a value of false just in the singular case the first operand is true and the second operand is false.

The truth table associated with the Logical implication if
p then q (symbolized as $p \rightarrow q$) is as
Logical implication
It may also be useful to note that $p \rightarrow q$ and $\neg p \vee q$

.مثال
q و p حيث q و p فصل المقترحات
،$p \vee q$هما نفس المقترحات كما في المثال أعلاه،
هو المقترح «اليوم مشمس أو الشمس تشرق على
الشاشة». هذا القول صحيح في أي يوم يكون
إما يومًا مشمسًا أو تشرق الشمس على الشاشة
بما في ذلك كلاهما). وهو غير صحيح فقط في الأيام التي لا تكون)
■ .مشمسة ولا تشرق الشمس فيها على الشاشة

.تعريف
(“ → ” “الاستدلال المنطقي” أو ”العبارة الشرطية”)
يرتبط الاستدلال المنطقي بعملية على
قيمتين منطقيتين، عادةً قيمتي
فرضيتين، تنتج قيمة كاذبة فقط في
الحالة الفردية التي تكون فيها المعامل الأول صحيحًا والمعامل الثاني كاذبًا

.

جدول الحقيقة المرتبط بالاستدلال المنطقي إذا
هو كما يلي ($p \rightarrow q$ يُرمز له بـ) q فإن p
الاستدلال المنطقي
$p \rightarrow q$ و $\neg p \vee q$ قد يكون من المفيد أيضًا ملاحظة أن
لهما نفس جدول الصدق. هناك مجموعة متنوعة من المصطلحات
،«q» ، فإنp بعضها هو: «إذا كان $p \rightarrow q$. المستخدمة للتعبير عن

have the same truth table. A variety of terminology is used to express $p \rightarrow q$. Some of them are: “if p, then q”,
“p implies q”, “if p, q” , “p only if q”, “p is sufficient for
q”, “a sufficient condition for q is p”, “q if p”, “q whenever p”, “q when p” , “q is necessary for p”
“a necessary condition for p is q” , “q follows from p” and "q unless $\neg p$.

Example.

Let p the proposition "Aly study well" and q the proposition "Aly will be a Computer Science student".

Then the formula $p \rightarrow q$ -as a formula in English- is "If Aly study well, then he will be a Computer Science student ". ■

كافٍ لـ p»، «q فقط إذا كان p»، «q، p إذا كان»، «q يستلزم p»
q»، «p إذا كان q»، «p هو q الشرط الكافي لـ»، «q
«p ضروري لـ q»، «p عندما يكون q»، «p كلما كان
“p يتبع q”، “q هو p الشرط الضروري لـ”
$\neg p$. ما لم يكن q" و

مثال.

هي q هي العبارة ”علي يدرس جيدًا“ و p لنفترض أن
.“العبارة ”علي سيكون طالبًا في علوم الكمبيوتر
كصيغة باللغة الإنجليزية- هي "إذا- $p \rightarrow q$ إذن الصيغة
درس علي جيدًا، فسيكون طالبًا في علوم الكمبيوتر
". ■

Definition. (Converse, Contra-positive and Inverse)
There are some related conditional statements that can be formed from $p \to q$. The conditional statement $q \to p$ is called the converse of $p \to q$. The contra-positive of $p \to q$ is the conditional statement $\neg q \to \neg p$.
The statement $\neg p \to \neg q$ is called the inverse of $p \to q$.
The contra-positive, $\neg q \to \neg p$, of a conditional statement $p \to q$ has the same truth value as $p \to q$.
On the other hand, neither the converse, $q \to p$, nor the inverse $\neg p \to \neg q$, has the same truth value as $p \to q$ for all possible truth values of p and q.
Example.
What are the contra-positive, the converse, and the inverse of the conditional statement "The home team wins whenever it is raining".
Solution.Because "q whenever p" is one of the ways to express the conditional statement $p \to q$, the original statement can be rewritten as "If it is raining, then the home team wins".-143-
Consequently, the contra-positive of this conditional statement is "If the home team does not win, then it is not raining". The converse is "If the home team wins, then it is raining".
The inverse "If it is not raining, then the home team does not win". Only the contrapositive is equivalent to the original statement

(تعريف. (المعكوس، المضاد، والعكس
تسمى $p \to q$. هناك بعض العبارات الشرطية ذات الصلة التي يمكن تشكيلها من المضاد لـ $p \to q$. $q \to p$ معكوس العبارة الشرطية
$p \to q$ هو العبارة الشرطية $\neg q \to \neg p$.
$p \to q$ معكوس $\neg q \to \neg p$ تسمى العبارة
، لعبارة شرطية$p \to q$ ¬المضاد،
$p \to q$ لها نفس قيمة الصدق مثل $p \to q$.
، ولا$q \to p$من ناحية أخرى، لا العكس،
لجميع $p \to q$ ، لهما نفس قيمة الصدق مثل$q \to p$¬ المعكوس
q و p قيم الصدق الممكنة لـ.

.مثال
ما هو العكس المضاد والعكس والعكس
للعبارة الشرطية «الفريق المضيف
يفوز كلما هطل المطر»؟
$p \to q$ هي إحدى طرق التعبير عن العبارة الشرطية «p كلما q» الحل. نظرًا لأن ، يمكن إعادة كتابة العبارة الأصلية على النحو التالي: «إذا هطل المطر، فإن -الفريق المضيف يفوز».-143
وبالتالي، فإن المضاد لهذا الشرط
هو "إذا لم يفز الفريق المضيف، فإنه لا تمطر". والعكس هو "إذا فاز الفريق ."المضيف، فإنه تمطر
والعكس "إذا لم تمطر، فإن الفريق المضيف
لا يفوز". فقط المضاد هو ما يعادل
-الشرط الأصلي.-144

نقدم الآن طريقة أخرى لدمج المقترحات.

تعريف. (ثنائي الشرط " ").

ثنائي الشرط (المعروف أيضًا باسم المساواة المنطقية) هو عملية على قيمتين منطقيتين، عادةً ما تكون قيمتي مقترحين، تنتج قيمة صحيحة إذا كان كلا المعاملين خطأ أو كلا المعاملين صحيحين.

هو كما ($p \leftrightarrow q$ يُكتب كـ) p XNOR q جدول الصدق لـ يتبع:

المساواة المنطقية

لهما نفس قيمة الصدق q و p صحيح إذا كان $p \leftrightarrow q$ إذن كلاهما صحيح أو كلاهما خطأ)، وخطأ إذا كان لهما قيم)

$p \leftrightarrow q$ صدق مختلفة. هناك بعض الطرق الأخرى للتعبير عن حيث "q إذا كان p" ؛"q ضروري وكافٍ لـ p"

p إذا كان" هو اختصار لـ "إذا وفقط إذا" و"إذا كان"

والعكس صحيح q فإن".

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	-145-	0

مثال.

q هي العبارة "يمكنك اجتياز الامتحان" و p لنفترض أن

هي $p \leftrightarrow q$ هي العبارة "أنت تدرس جيدًا". إذن

العبارة "يمكنك اجتياز الامتحان إذا وفقط إذا

درست جيدًا". ■

ملاحظة.

المشغلات السابقة (¬، ∧، ∨، →، ↔) هي

We now introduce another way to combine propositions.

Definition. (Biconditional " ").

Biconditional (also known as logical equality) is an operation on two logical values, typically the values of

two propositions, that produces a value of true if both

operands are false or both operands are true.

The truth table for p XNOR q (written as $p \leftrightarrow q$) is as follows:

Logical Equality

So $p \leftrightarrow q$ is true if p and q have the same truth value (both true or both false), and false if they have different

truth values. There are some other ways to express $p \leftrightarrow q$

"p is necessary and sufficient for q"; "p iff q" where "iff" is the abbreviation for "if and only if" and " if p then q and conversely ".

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	-145-	0

Example.

Let p be the statement "You can pass the exam." and

let q
be the statement “You study well”. Then $p \leftrightarrow q$ is the
statement “You can pass the exam if and only if you study well”. ■
Remark.
The previous operators (¬, ∧, ∨, →, ↔) are the common operators which we will focus on.
Definition. (Exclusive Or" ⊕ ").
Truth table for Exclusive Or " ⊕ "
Logical Equality
Actually, this operator can be expressed by using other
operators:
$p \oplus q$ is the same as ¬ $(p \leftrightarrow q)$.
⊕ is used often in CSE. So we have a symbol for it.

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0		

المشغلات الشائعة التي سنركز عليها.
تعريف. (أو حصري "⊕").
جدول الحقيقة لأو حصري "⊕"
المساواة المنطقية
في الواقع، يمكن التعبير عن هذا المشغل باستخدام مشغلات أخرى
:
$p \oplus q$ هو نفسه ¬ $(p \leftrightarrow q)$.
يُستخدم ⊕ كثيرًا في CSE. لذلك لدينا رمز له.

p	q	$p \oplus q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0		0

● Order of precedence

As a way of reducing the number of necessary parentheses, one may introduce precedence rules for operators. ¬ has higher precedence than ∧, ∧ higher than
∨, and ∨ higher than →.

Here is a table that shows a commonly used precedence
of logical operators.

The order of precedence determines which connective is
the "main connective" when interpreting a formula.

Example.

$\neg p \wedge q$ means $(\neg p) \wedge q$;

$p \wedge q \longrightarrow r$ means $(p \wedge q) \longrightarrow r$;

$p \vee q \wedge \neg r \rightarrow s$ is short for $[p \vee (q \wedge (\neg r))] \rightarrow s$.

When in doubt, use parenthesis-147-

Example.

Find the truth table for the following formula: "If you studied discrete Mathematics well and did not neglect
studying logic, you would gain high marks in the exam".

Solution.

Suppose that

p: studied discrete Mathematics well;

q: neglect studying logic;

ترتيب الأسبقية

كطريقة لتقليل عدد الأقواس الضرورية

.، يمكن إدخال قواعد الأسبقية للمشغلات

تتمتع ¬ بأسبقية أعلى من ∧، و∧ أعلى من

.→ ، و∨ أعلى من∨

فيما يلي جدول يوضح الأسبقية الشائعة الاستخدام

.للمشغلات المنطقية

يحدد ترتيب الأسبقية أي رابط هو

.الرابط الرئيسي" عند تفسير الصيغة"

.مثال

$\neg p \wedge q$ تعني $(\neg p) \wedge q$؛

$p \wedge q \longrightarrow r$ تعني $(p \wedge q) \longrightarrow r$؛

$p \vee q \wedge \neg r \rightarrow s$ هي اختصار لـ $[p \vee (q \wedge (\neg r))] \rightarrow s$.

-عند الشك، استخدم الأقواس-147

.مثال

أوجد جدول الحقيقة للصيغة التالية: "إذا

درست الرياضيات المنفصلة جيدًا ولم تهمل

."دراسة المنطق، فستحصل على درجات عالية في الامتحان

.الحل

افترض أن

p: درس الرياضيات المنفصلة جيدًا؛

q: أهمل دراسة المنطق؛

r: gain high mark in the exam.

The formula is $p \wedge \neg q \longrightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \longrightarrow r$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

■-148-

● Tautologies and Contradictions Definition.

A formula that is always true, no matter what the truth values of the propositions that occur in it, is called a
tautology.

A formula that is always false is called contradiction.

A formula that is neither a tautology nor a contradiction
is called a contingency.

Example.

We can construct examples of tautologies and contradictions using just one proposition. Consider the truth tables of $p \vee \neg p$ and $p \wedge \neg p$. Since $p \vee \neg p$ is always true, it is a tautology. Since $p \wedge \neg p$ is always false, it is a contradiction.

الحصول على درجة عالية في الامتحان :.

الصيغة هي $p \wedge \neg q \longrightarrow r$

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge \neg q \longrightarrow r$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

■-148-

● التكرار والتناقض التعريف.

تسمى الصيغة التي تكون صحيحة دائمًا، بغض النظر عن قيم صحة المقترحات التي ترد فيها،
تكرارًا.

وتسمى الصيغة التي تكون خاطئة دائمًا تناقضًا.

أما الصيغة التي لا تكون تكرارًا ولا تناقضًا
فتسمى احتمالية.

مثال.

يمكننا بناء أمثلة على التكرار والتناقض
p و $p \vee \neg$p باستخدام اقتراح واحد فقط. لننظر إلى جداول الصدق لـ
$p \wedge \neg$p صحيحة دائمًا، فهي تكرار. وبما أن $p \vee \neg$p بما أن $\wedge \neg$p.
خاطئة دائمًا، فهي تناقض.

مثال على التكرار والتناقض

Example of a tautology and a contradiction

p	¬p	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

● Logical Equivalence

Definition.

Two formulas p and q are logically equivalent, denoted by $p \equiv q$, if and only if they have the same truth values for all possible combination of truth values for the propositional variables. Also,

Definition.

Two formulas p and q are called logically equivalent if $p \leftrightarrow q$ is a tautology.

Example.

The formulas $p \rightarrow q$ and $\neg p \vee q$ are logically equivalent.

p	q	¬p	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

■-150-

Example.

p	¬p	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	1	0
0	1	1	0

● التكافؤ المنطقي

.التعريف

متكافئتين منطقياً، ويُشار إليهما q و p تكون الصيغتان ، إذا كان لهما نفس قيم الصدق $p \equiv q$ بالرمز لجميع التركيبات الممكنة لقيم الصدق للمتغيرات المقترحة. أيضاً،

.تعريف

متكافئتين منطقياً إذا كانت q و p تسمى الصيغتان عبارة عن تكرار لفظي $p \leftrightarrow q$.

.مثال

.متكافئتان منطقياً $p \rightarrow q$ و $\neg p \vee q$ الصيغتان

p	q	¬p	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

متكافئتان من الناحية المنطقية $\neg p \wedge \neg q$ و $\neg(p \vee q)$ الصيغتان .

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

و $\neg(p \vee q)$ نظرًا لأن قيم الحقيقة للصيغتين تتفق مع جميع التركيبات الممكنة لقيم الصحة $\neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ ، يترتب على ذلك أنq و p لـ هي عبارة عن تكرار لفظي وأن هذه الصيغ متكافئة من الناحية المنطقية.

-وبالمثل، يمكننا إثبات أن-151

(نظرية. (الخصائص الجبرية للوصلات

(1) قواعد التبادلية:

(أ) $p \wedge q \equiv q \wedge p$، (ب) $p \vee q \equiv q \vee p$.

(2) قواعد الترابط:

(أ) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$،

(ب) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

(3) قواعد التوزيع:

(أ) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$،

(ب) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

(4) قواعد الهوية:

(أ) $p \vee 0 \equiv p$، (ب) $p \wedge 1 \equiv p$

(5) قواعد النفي:

$p \wedge \neg p \equiv 0$ و $p \vee \neg p \equiv 1$

The formulas $\neg(p \vee q)$ and $\neg p \wedge \neg q$ are logically equivalent.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Since the truth values of the formulas $\neg(p \vee q)$ and $\neg p \wedge \neg q$ agree for all possible combinations of the truth values of p and q, it follows that $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ is a tautology and these formulas are logically equivalent.

Similarly, we can prove that-151-

Theorem. (Algebraic properties of connectives)

(1) Commutative rules:

(a) $p \wedge q \equiv q \wedge p$, (b) $p \vee q \equiv q \vee p$.

(2) Associative rules:

(a) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$,

(b) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$.

(3) Distributive rules:

(a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,

(b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

(4) Identity rules:

(a) $p \vee 0 \equiv p$, (b) $p \wedge 1 \equiv p$

(5) Negation rules:

$p \wedge \neg p \equiv 0$ and $p \vee \neg p \equiv 1$.

(6) Double negation rule:	**(6) قاعدة النفي المزدوج:**
$\neg(\neg p) \equiv p$.	$\neg(\neg p) \equiv p$.
(7) Idempotent rules:	**(7) قواعد الإيدمبوتنت:**
$p \vee p \equiv p$ and $p \wedge p \equiv$.	$p \vee p \equiv p$ و $p \wedge p \equiv$.
(8) De Morgan's rules:	**(8) قواعد دي مورغان:**
(a) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$,	(أ) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ ،
(b)-152-	(ب)-152-
(9) Universal rules:	**(9) القواعد العامة:**
$p \wedge 0 \equiv 0$ and $p \vee 1 = 1$.	$p \wedge 0 \equiv 0$ و $p \vee 1 = 1$.
(10) Absorption rules:	**(10) قواعد الامتصاص:**
(a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$,	(أ) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$،
(b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.	(ب) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$.
(11) Alternative proof rule:	**(11) قاعدة الإثبات البديلة:**
(a) $p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \longrightarrow r \equiv (p \wedge \neg r) \longrightarrow q$.	(أ) $p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \wedge \neg q) \longrightarrow r \equiv (p \wedge \neg r) \longrightarrow q$.
(b) $p \vee q \longrightarrow r \equiv (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$.	(ب) $p \vee q \longrightarrow r \equiv (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)$.
(12) Conditional rules:	**(12) القواعد الشرطية:**
(a) $p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$	(أ) $p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$
(b) $\neg(p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.	(ب) $\neg(p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$.
(13) Biconditional rules:	**(13) القواعد الثنائية الشرطية:**
(a) $p \leftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$	(أ) $p \leftrightarrow q \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
(b) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	(ب) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
(c) $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$	(ج) $(p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q$

(14) Rules of contrapositive:

$p \longrightarrow q \equiv \neg\, q \longrightarrow \neg p$

(15) Exportation – importation rule:

$p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \equiv p \wedge q \longrightarrow r$

Proof.-153-

Example.

Use the algebraic properties of connectives to prove:

(a) $\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \equiv \neg p \vee \neg q$;

(b) $[(p \vee q) \wedge (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow r$ is a tautology.

Solution.

(a) Exercise.

(b) $[(p \vee \mathrm{q}) \wedge ((p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r))] \longrightarrow r$

$\equiv [(p \vee q) \wedge ((p \vee q) \longrightarrow r)] \rightarrow r$

Alternative proof rule

$\equiv [(p \vee \mathrm{q}) \wedge (\neg(p \vee q) \vee \mathrm{r})] \longrightarrow r$

Conditional rule

$\equiv [((p \vee q) \wedge (\neg(p \vee q))) \vee ((p \vee q) \wedge r)] \longrightarrow r$

Distributive rule

$\equiv [0 \vee ((p \vee q) \wedge r)] \longrightarrow r$ Negation rule

$\equiv [(p \vee q) \wedge r] \longrightarrow r$ Identity rule

$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge r] \vee r$ Conditional rule

$\equiv [\neg(p \vee q) \vee \neg r] \vee r$ De Morgan's rule

$\equiv \neg(p \vee q) \vee [\neg \mathrm{r} \vee r]$ Associative rule

$\equiv \neg(p \vee q) \vee 1$ Negation rule

≡ 1-154-

Exercise Set (2.1)

1- Which of the following are propositions?

(14) قواعد التناظر:

$p \longrightarrow q \equiv \neg\, q \longrightarrow \neg p$

(15) قاعدة التصدير والاستيراد:

$p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \equiv p \wedge q \longrightarrow r$

153-.إثبات-

.مثال

:استخدم الخصائص الجبرية للوصلات لإثبات

(أ) $\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \equiv \neg p \vee \neg q$؛

(ب) $[(p \vee q) \wedge (p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r)] \longrightarrow r$ هو تكرار لفظي.

.الحل

.أ) تمرين)

(ب) $[(p \vee \mathrm{q}) \wedge ((p \longrightarrow r) \wedge (q \longrightarrow r))] \longrightarrow r$

$\equiv [(p \vee q) \wedge ((p \vee q) \longrightarrow r)] \rightarrow r$

قاعدة إثبات بديلة

$\equiv [(p \vee \mathrm{q}) \wedge (\neg(p \vee q) \vee \mathrm{r})] \longrightarrow r$

قاعدة الشرط

$\equiv [((p \vee q) \wedge (\neg(p \vee q))) \vee ((p \vee q) \wedge r)] \longrightarrow r$

قاعدة التوزيع

$\equiv [0 \vee ((p \vee q) \wedge r)] \longrightarrow r$ قاعدة النفي

$\equiv [(p \vee q) \wedge r] \longrightarrow r$ قاعدة الهوية

$\equiv \neg[(p \vee q) \wedge r] \vee r$ قاعدة الشرط

$\equiv [\neg(p \vee q) \vee \neg r] \vee r$ قاعدة دي مورغان

$\equiv \neg(p \vee q) \vee [\neg \mathrm{r} \vee r]$ القاعدة الترابطية

$\equiv \neg(p \vee q) \vee 1$ قاعدة النفي

≡ 1-154-

(مجموعة التمارين (2.1

1- أي من التالي عبارة عن مقترحات؟

(a) Buy Premium Bonds!
(b) The Apple Macintosh is a 16-bit computer.
(c) There is a largest even number.
(d) Why are we here?
(e) 8 + 7 = 13.
(f) $a + b = 13$.
2- p is "1024 bytes is known as 1MB" and q is "A computer keyboard is an example of a data input device".
Express the following formulas as English sentences in as
natural a way as you can. Are the resulting propositions
true or false?
(a) $p \wedge q$; (b)) $p \vee q$; ; (c) $\neg p$.
3- p is "$x < 50$"; q is "$x > 40$".
Write as simply as you can:
(a) $\neg p$; (b) $\neg q$; (c) $p \wedge q$; (d) $p \vee q$; (e) $\neg p \wedge q$;
(f) $\neg p \wedge \neg q$.
One of these compound propositional functions always produces the output true, and one always outputs false.
Which ones?-155-
4- p is "I like Math" and q is "I am going to spend at least 6 hours a week on Math". Write in as simple English as you can:

أ) اشترِ سندات مميزة!)
ب) جهاز كمبيوتر 16 بت Apple Macintosh هو جهاز.)
ج) هناك أكبر عدد زوجي.)
د) لماذا نحن هنا؟)
هـ) 8 + 7 = 13)
و) $a + b = 13$.
2- p هو "لوحة مفاتيح q هو "1024 بايت يُعرف بـ 1 ميجابايت" و الكمبيوتر هي مثال على جهاز إدخال البيانات".
عبّر عن الصيغ التالية بجمل إنجليزية بطريقة طبيعية قدر الإمكان.
هل الصيغ الناتجة
صحيحة أم خاطئة؟ هل المقترحات الناتجة
صحيحة أم خاطئة؟
أ) $p \wedge q$ ؛ ب) ($p \vee q$) ؛ ج) ؛ $\neg p$.
3- p هو "$x > 40$" ؛ q هو "$x < 50$".
اكتب بأبسط طريقة ممكنة:
أ) $\neg p$ ؛ ب) $\neg p \wedge q$ ؛ ج) $p \wedge q$ ؛ د) $p \vee q$ ؛ هـ) $\neg p \wedge \neg q$.
إحدى هذه الدوال المركبة تنتج دائمًا الناتج صحيح، والأخرى تنتج دائمًا الناتج خطأ.
155-أيهما؟-
4- p هي "أنا أحب الرياضيات" و q هي "سأقضي ما لا يقل عن 6 ساعات أسبوعيًا في دراسة الرياضيات". اكتب بأبسط لغة إنجليزية ممكنة

(a) $(\neg p) \wedge q$; (b) $(\neg p) \vee q$;
(c) $\neg(\neg p)$; (d) $(\neg p) \vee (\neg q)$;
(e) $\neg(p \vee q)$; (f) $(\neg p) \wedge (\neg q)$;
(g) $p \rightarrow$; (h) $p \wedge q$.

5- Construct a truth table for each of these formulas:

(a) $p \wedge \neg p$;
(b) $p \vee \neg p$;
(c) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$;
(d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$;
(e) $p \rightarrow \neg p$;
(f) $p \leftrightarrow \neg p$.

6- Show that each of these implications is a tautology by
using truth tables.

(a) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$.
(b) [-156-

7- Show that each implication in Exercise 6 is a tautology
without using truth tables.

8- Show that every pair in the following are logically equivalent:

(a) $p \rightarrow q$ and $\neg q \rightarrow \neg p$
(b)$\neg p \leftrightarrow q$and$p \leftrightarrow \neg q$
(c) $\neg(p \leftrightarrow q)$ and$\neg p \leftrightarrow \neg q$
(d) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ and$p \rightarrow (q \wedge r)$
(e) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ and$p \rightarrow (q \vee r)$

9- Show that$(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ is a tautology.

(أ) $(\neg p) \vee q$؛ (ب) $(\neg p) \wedge q$؛
(ج) $\neg(\neg p)$؛ (د) $(\neg p) \vee (\neg q)$؛
(هـ) $\neg(p \vee q)$؛ (و) $(\neg p) \wedge (\neg q)$؛
(ز) $p \rightarrow q$ ؛ (ح) $p \wedge q$.

5- قم ببناء جدول صدق لكل من هذه الصيغ:

(أ) $p \wedge \neg p$؛
(ب) $p \vee \neg p$؛
(ج) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$؛
(د) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$؛
(هـ) $p \rightarrow \neg p$؛
(و) $p \leftrightarrow \neg p$.

6- أوضح أن كل من هذه الاستدلالات هو تكرار لفظي باستخدام جداول الصدق.

(أ) $[\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$.
ب-) [-156)

7- أوضح أن كل استدلال في التمرين 6 هو تكرار دون استخدام جداول الحقيقة.

8- أوضح أن كل زوج من الأزواج التالية متكافئ من الناحية المنطقية:

(أ) $p \rightarrow q$ و $\neg q \rightarrow \neg p$
(ب) $p \leftrightarrow q$ و $\neg p \leftrightarrow \neg q$
(ج) $\neg(p \leftrightarrow q)$ و $\neg p \leftrightarrow \neg q$
(د) $p \rightarrow (q \wedge r)$ و $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
(هـ) $p \rightarrow (q \vee r)$ و $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

9- أظهر أن $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$ هي عبارة عن تكرار لفظي

10- Show that (p → q) → r and p → (q → r) are not logically equivalent.	p) أظهر أن - (p → q) → r و p → (q → r) ليسا متكافئين منطقيًا.
11-Prove that:	11- أثبت أن:
(a) $p \longrightarrow q \equiv \neg q \longrightarrow \neg p$;	(أ) $p \longrightarrow q \equiv \neg q \longrightarrow \neg p$؛
(b) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$;	(ب) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$؛
(c) $p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$;	(ج) $p \longrightarrow q \equiv \neg p \vee q$؛
(d)-157-	د)-157)
2.2 Predicates and Quantifiers	2.2 المسندات والمحددات
(A) Predicates	أ) المسندات)
Predicates are statements involving variables (called predicate variables), such as:	المسندات هي عبارات تتضمن متغيرات (تسمى متغيرات المسند)، مثل:
"$x > 3$", "$x = y + 3$", "$x + y = z$".	"$x > 3$"، "$x = y + 3$"، "$x + y = z$".
They are not propositions because the truth value you give them will depend on the values assigned to the variables x and y. The domain of a predicate variable is the set of all values that may be substituted in place of the variable.	وهي ليست مقترحات لأن قيمة الصحة التي تمنحها لها ستعتمد على القيم المخصصة للمتغيرات x و y. مجال متغير المسند هو مجموعة جميع القيم التي يمكن استبدالها بدلاً من المتغير.
In English you may have statements like this:	في اللغة الإنجليزية، قد تجد عبارات مثل:
1- She is Tall and Fair.	1- هي طويلة وجميلة.
2- x was born in a city y in the year z.	2- x ولد في مدينة y في عام z.

Often pronouns (I, he, she, you etc.) are used in place of variables. In the first case - we cannot say if the statement is true because that depends of who she is and in the second case the statement will get a truth value depending on variable
x, y and z. Predicate are noted something like this-158-
For example
$P(x, y, z)$. This stands for the predicate "$x + y = z$".
$M(x, y)$. This stands for "x is married to y".
In general, you have predicates in the form of:
(x) - this is a unary predicate (has one variable).
(x, y) - this is a binary predicate (has two variables).
$P(x1, x2, \ldots, xn)$ - this is an n-ray or n-place predicate –
(has n individual variables in a predicate).
You have to choose the values for the variables – these can be from a set of humans - a specific human, a set of places or a place, a set of integers or an integer, a set of real numbers or a real number and so on. The values are chosen from a particular domain of values called a universe or a universe of discourse.
If we take a look at this again:
x was born in a city y in the year z. x is taken from a set of human beings, y is taken from a set of cities and z is taken from a set of years. This is called the underlying universe. Looking at this again:

غالبًا ما تستخدم الضمائر (أنا، هو، هي، أنت، إلخ) بدلاً من المتغيرات. في الحالة الأولى، لا يمكننا تحديد ما إذا كانت العبارة صحيحة أم لا لأن ذلك يعتمد على من هي هي، وفي الحالة الثانية، ستحصل العبارة على قيمة صحيحة اعتمادًا على المتغيرات
-158يتم تدوين المسند على النحو التالي- z و y و x
على سبيل المثال
$P(x, y, z)$. وهذا يمثل المسند "$x + y = z$".
$M(x, y)$. وهذا يمثل "x متزوج من y".
بشكل عام، توجد المسندات في الصيغة التالية:
(هذا مسند أحادي (يحتوي على متغير واحد - (x)).
(هذا مسند ثنائي (يحتوي على متغيرين - (x, y)).
n-place – أو n-ray هذا مسند - $P(x1, x2, \ldots, xn)$
(متغيرات فردية في المسند n يحتوي على).
عليك اختيار قيم المتغيرات - يمكن أن تكون من مجموعة من البشر - إنسان معين، مجموعة من الأماكن أو مكان، مجموعة من الأعداد الصحيحة أو عدد صحيح، مجموعة من الأعداد الحقيقية أو عدد حقيقي، وهكذا. يتم اختيار القيم من مجال معين من القيم يسمى الكون أو كون الخطاب.
إذا ألقينا نظرة على هذا مرة أخرى:
y مأخوذ من مجموعة من البشر، و x. z في السنة y ولد في مدينة x مأخوذ من مجموعة من السنوات. z مأخوذ من مجموعة من المدن، و وهذا ما يسمى الكون الأساسي. لننظر إلى هذا مرة أخرى:

$P(x, y, z)$. من مجموعة من z و y و x سيتم أخذ قيم المتغيرات .الأعداد الصحيحة أو الأعداد الصحيحة السالبة	(x, y, z).The values for the variables x, y and z will be taken from a set of integers or negative integers.